Faire des mathématiques

Terminale S spécialité - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr - 2015-2016

1 Notion de proposition

Définition 1

Une ***proposition*** est une affirmation qui peut prendre deux valeurs logiques :
V (VRAI) ou F (FAUX).

Remarque. Une proposition est aussi parfois appelée une *affirmation* ou une *assertion*.

Exemple. Quelques propositions :

1. « Il neige en ce moment à Séoul »
2. « Tout carré d'entier relatif est supérieur ou égal à 1 »
3. « $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel »
4. « $\sqrt{x} \geqslant 1$ »
5. « Dieu existe ! »
6. « Par deux points il ne passe qu'une seule droite »
7. « Tout entier pair est somme de deux nombres premiers » (Conjecture de Goldbach 1670-1764)
8. « $1 + 1 = 3$ »
9. « Je suis un menteur »

Remarque. Il existe donc plusieurs types de propositions :

1. Des propositions qui sont fausses ou vraies de façon évidente. (8)
2. Des propositions que l'on accepte comme vraie (les axiomes de base). (6)
3. Des propositions dont la valeur logique, vraie ou fausse, peut être prouvée à l'aide d'une démonstration. (2, 3)
4. Des propositions pour lesquelles nos connaissances sont insuffisantes pour répondre. (1, 4)
5. Des propositions invérifiables. (5, 7 ?)
6. Des propositions qui ne peuvent être ni vraies, ni fausses. (9)

Remarque. Pour exprimer qu'une proposition A est vraie, on dira tout simplement : « On a A » .
(« on a $1 + 1 = 2$ » signifie « la proposition $1 + 1 = 2$ est vraie »)

2 Principe des mathématiques

Les mathématiques sont construites à partir de ***définitions*** ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, point, segment, parallélisme ...) et d'un petit nombre de propositions que l'on accepte comme vraies (les ***axiomes***). On construit alors de nouvelles propositions que l'on prouve être soit vraies soit fausses, à l'aide d'une ***démonstration***. Les démonstration reposent sur des règles de ***logique***.

Exemple. En géométrie euclidienne, on définit entre autre les notions de points, de segment et de parallélisme et on pose 5 axiomes de base.

Les axiomes d'Euclide :

1. Tout segment peut se prolonger indéfiniment des deux côtés.
2. Par deux points il ne passe qu'une seule droite.
3. Par un point du plan, il ne passe qu'une seule droite parallèle à une autre.
4. Tous les angles droits ont la même mesure.
5. Pour tout point A et tout point B distinct de A, on peut décrire un cercle de centre A passant par B.

3 Les techniques usuelles de démonstration

- **Utilisation d'un théorème** :

Définition 2 – Théorème

Un ***théorème*** est une proposition mathématique VRAIE qui se présente sous forme d'une implication : « $A \Rightarrow B$ » (si A est VRAIE alors B l'est aussi).

Remarque. A correspond aux hypothèses du théorème, B correspond à la conclusion du théorème. Si les hypothèses A sont vérifiées alors la proposition B est vraie.

Méthode. Si l'on dispose d'un théorème de la forme « $A \Rightarrow B$ », on peut montrer que B est VRAIE en prouvant que la proposition A est VRAIE.
La rédaction est alors la suivante :
1. Montrons A : ...
2. D'après le théorème « $A \Rightarrow B$ », on en déduit que B est vraie.

Remarque. N'oubliez pas de citer le nom des théorèmes que vous utilisez!!!

Exemple. Dans le cas des fonctions dérivables, on dispose du théorème suivant :
« SI la dérivée d'une fonction f dérivable est positive sur l'intervalle I
ALORS la fonction f est croissante sur I »

Ainsi, pour montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on peut procéder ainsi :
- Étape 1 : On commence par montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est positive sur $\mathbb{R}$.
- Étape 2 : On cite le théorème utilisé.
- Étape 3 : On conclut que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Attention aux utilisations du mot « DONC » et du symbole « $\Rightarrow$ » :
– « A donc B » signifie : COMME A est vrai alors B est aussi vrai (on sait que A est vrai).
– « $A \Rightarrow B$ » signifie : SI A est vrai alors B sera aussi vrai (on ne sait pas si A est vrai).
Dans les raisonnements par déduction, on utilisera le mot DONC et non l'implication $\Rightarrow$

- **Démonstration par récurrence** : Soit P_n une proposition dépendant d'un entier naturel n. Pour démontrer que la proposition P_n est vraie pour toutes les valeurs de n à partir de l'entier n_0, on démontre :
  1) qu'elle est vraie pour $n = n_0$ (Initialisation)
  2) que si elle est vraie pour un entier arbitraire k, alors elle est vraie pour l'entier qui suit $k+1$. (Hérédité)
  3) D'après le principe de récurrence, on peut alors en déduire que la proriété P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0. (Conclusion)

- **Démonstration par l'absurde** : On suppose le contraire de ce que l'on souhaite démontrer et on cherche à aboutir à une absurdité ou une contradiction (voir, dans le chapitre d'introduction, la démonstration qui prouve que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel).

- **Utilisation d'un contre-exemple** : Un contre-exemple est souvent la méthode la plus efficace pour prouver qu'une proposition est FAUSSE.

- **Raisonnement par disjonction de cas** : Ce mode de raisonnement repose sur le fait que « $(A \Rightarrow B)$ ET (non$A \Rightarrow B$) » est logiquement équivalente à « B ».

  Méthode. Pour montrer qu'une proposition B est vraie :
  1. On démontre que si A est vrai alors B est vrai
  2. On démontre que si A est faux alors B est vrai

4 Savoir chercher

Savoir chercher, c'est aussi accepter de ne pas trouver du premier coup et avoir la patience de tout recommencer. Parfois, c'est aussi avoir la sagesse d'arrêter de chercher pour pouvoir reprendre plus tard, avec un regard neuf.

Méthode. Quelques éléments de réflexion ...

- **Lire attentivement l'énoncé** : il faut prendre le temps de bien comprendre la question posée, ni plus ni moins. Chaque mot a son importance. On peut aussi chercher à reformuler la question.

- **Faire des essais avec des valeurs particulières** : pour bien comprendre la nature du problème, observer les résultats et essayer d'en déduire des conjectures.

- **Savoir utiliser la calculatrice, un logiciel de calcul formel, un tableur, un logiciel de géométrie dynamique ...**

- **... savoir se passer de la calculatrice** : souvent, la décomposition des calculs à la main permet de faire avancer la réflexion, en particulier en arithmétique. Faire des schémas permet aussi d'établir des connections, invisibles avec une calculatrice.

- **Faire des conjectures** : quand une conjecture est faite il faut chercher à la démontrer ou à l'invalider.